



University of the Pacific Scholarly Commons

Euler Archive - All Works

Euler Archive

1776

Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum" (1776). *Euler Archive - All Works*. 478.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/478>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

FORMVLAE GENERALES
PRO
TRANSLATIONE
QVACVNQVE CORPORVM
RIGIDORVM.

Auctore

L. E V L E R O.

§. 1.

Quando corporis cuiusque rigidi motum determinari oportet, tota inuestigatio commode in duas partes distinguitur, alteram geometricam, alteram mechanicam. In priore enim parte sola translatio corporis ex dato situ in alium quemcunque sine vilo respectu habito ad motus principia per formulas analyticas repraesentari debet, quarum ope positio singulorum punctorum post translationem ex earum positione initiali definiri queat; quae ergo inuestigatio vnice ad Geometriam vel potius ad Stereometriam est referenda. Facile autem intelligitur, si ista inuestigatio ab altera, quae proprie ad Mechanicam pertinet, separetur, tum ipsam motus determinationem ex principiis motus multo facilius expediri posse, quam si vtraque inuestigatio coniunctum suscipiatur. Cum igitur in tractatu meo de motu corporum rigidorum hanc vtramque inuesti-

A a 3

gatio.

190 FORMVLAE PRO TRANSLATIONE

gationem simul suscepisssem, unde tota tractatio non parum molesta et intricata est reddita: hoc loco solam partem geometricam accuratius euoluere constitui, quo deinceps pars mechanica faciliori negotio expediri possit.

Tab. II.
Fig. 1.

§. 2. Vt igitur primo situm initialem corporis rigidi accurate definiam, positionem singulorum eius punctorum more solito per ternas coordinatas inter se normales repraesentari conueniet. Hunc in finem constituo ternos axes fixos IA , IB et IC se inuicem in puncto I normaliter secantes, quorum bini IA et IB in ipso plano tabulae sint siti, tertius vero IC hinc plano perpendiculariter insistat. Nunc considero punctum corporis quodcunque Z , ex quo ad planum AIB demittatur perpendicularum ZS ; tum vero ex puncto S ad axes IA et IB ducantur normales SP et SQ , ac vocemus coordinatas $IP = QS = p$, $PS = IQ = q$ et ipsum perpendicularum $SZ = r$, cui in axe IC aequalis capiat portio $IR = r$; ita ut punctum Z reperiatur in diagonali IZ parallelepipedii rectanguli, quod ex lateribus IP , IQ et IR formatur. Hoc igitur modo positio singulorum corporis punctorum commodissime per ternas coordinatas p , q , r , determinabitur.

§. 3. Quo autem deinceps facilius ista repraesentatio ad inuestigationem mechanicam accommodari possit, punctum I aptissime accipitur in ipso centro grauitatis seu potius inertiae corporis rigidi propo-

propositi; sic enim istud insigne commodum im-
 tramus, vt posita massula corporis in Z existentis
 $= dM$, per totam corporis extensionem fiat

1°. $\int p dM = 0$. 2°. $\int q dM = 0$. 3°. $\int r dM = 0$
 siquidem haec integralia per totum corpus extendan-
 tur. Praeterea vero maximam vtilitatem afferet,
 si terni axes IA , IB , IC in ipsis axibus corporis
 principalibus constituantur; tum enim etiam valo-
 res trium sequentium formularum integralium pari-
 ter per totum corpus extensi nihilo aequales red-
 dentur, quippe quae sunt

4°. $\int p q dM = 0$. 5°. $\int p r dM = 0$. 6°. $\int q r dM = 0$
 haecque tantum hic in transitu notasse iuuabit, quan-
 doquidem pars geometrica ab istis aequationibus
 neutiquam pendet.

§. 4. Iam facta quacunque corporis translatio-
 ne consideremus primo locum i , in quem punctum
 corporis I fuerit translatum, pro quo vocemus coor-
 dinatas $If = f$, $fg = g$ et $gi = b$; tum vero pun-
 ctum Z ex situ initiali translatum sit in z , pro quo
 statuamus coordinatas $Ix = x$, $xy = y$ et $yz = z$,
 ac primo quidem statim manifestum est, distantiam
 iz etiamnunc aequalem esse debere distantiae IZ ,
 qua, cum esset $\sqrt{pp + qq + rr}$, nunc vero sit

$$iz = \sqrt{(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-b)^2}$$

habebimus hanc aequationem:

$$pp + qq + rr = (x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-b)^2.$$

Praeterea vero necesse est, vt distantiae inter bina
 corpo-

corporis puncta quaecunque in situ translato etiam nunc aequales sint distantis eorundem punctorum in situ initiali, cui conditioni sequenti modo satisficiemus.

§. 5. Sumamus punctum z in eo loco, in quem punctum P ex statu initiali fuerit translatum; hic enim non consultum videtur figuram nostram tot novis lineis ducendis onerare. Deinde etiam in ipso statu initiali punctum Z ubicunque libuerit accipi potest; unde si punctum Z in puncto P accipiat, etiam punctum z in situ translato locum ipsi P respondentem exhibebit.

§. 6. Cum igitur punctum Z in punctum P incidat, si fiat $q=0$ et $r=0$, quoniam in genere ternas coordinatas x, y, z tanquam certas functiones ipsarum p, q et r considerare licet, quomocunque hae functiones fuerint comparatae, si in iis faciamus $q=0$ et $r=0$ hae coordinatae necessario tales formas accipere debebunt;

$$x=f+Fp, y=g+Gp, z=b+Hp.$$

Quia enim ponimus $q=0$ et $r=0$ spectata p ut variabili, coordinatae x, y, z ostendere debent situm in quem linea recta IP fuerit translata; quae cum sit recta, ea in situ translato erit linea recta ipsi aequalis, ideoque coordinatae x, y, z positionem huius lineae rectae i z exprimere debent, unde, cum sumto $p=0$ etiam punctum z in i incidere debeat, evidens est, quantitates x, y, z ita per variabilem p definiri debere, ut posito $p=0$ fiat $x=f, y=g$ et $z=b$. Tum vero quia aequatio debet esse pro
linea

linea recta, aliae formae locum habere nequeunt, nisi quas statuimus: scilicet

$$x = f + Fp, y = g + Gp, z = b + Hp$$

vbi litterae F, G, H certas designant constantes ab indole translationis pendentes.

§. 7. Statim autem manifestum est, istas constantes ita comparatas esse debere, ut intervallum iz aequale sit intervallo $IP = p$, unde sequitur ista determinatio:

$$iz^2 = F^2 p^2 + G^2 p^2 + H^2 p^2 = p^2$$

quam ob rem necesse est ut sit $F^2 + G^2 + H^2 = 1$.

Quod si ergo sumamus $F = \sin. \zeta$, fieri debet $G^2 + H^2 = \cos. \zeta^2$; hanc ob rem statuamus

$$G = \cos. \zeta \sin. \eta \text{ et } H = \cos. \zeta \cos. \eta, \text{ ita ut sit}$$

$$F = \sin. \zeta, G \cos. \zeta \sin. \eta \text{ et } H = \cos. \zeta \cos. \eta.$$

Hoc ergo modo tres litterae illae F, G, H ad duos tantum angulos ζ et η sunt reductae.

§. 8. Simili modo sumamus nunc punctum z in eo loco, in quem punctum Q ex situ initiali fuerit translatus; at vero punctum Z in punctum Q cadit sumendo $p = 0$ et $r = 0$. Hoc ergo casu ternae coordinatae x, y, z ita pendebunt a sola variabili q , ut facto $q = 0$ iterum fiat $x = f, y = g$ et $z = b$; quare, cum aequatio etiam debeat esse pro linea recta, coordinatae talem formam habebunt:

$$x = f + F'q, y = g + G'q, z = b + H'q$$

vbi ergo ob $iz = q$ etiam esse oportet

$$F'F' + G'G' + H'H' = 1$$

Tom. XX. Nou. Comm.

Bb

cui

194 FORMVLAE PRO TRANSLATIONE

cui conditioni commodè per binos angulos ζ' et η' ita satisfiet, ut sit

$$F' = \sin. \zeta', \quad G' = \cos. \zeta' \sin. \eta', \quad H' = \cos. \zeta' \cos. \eta'.$$

§. 9. Sumamus nunc punctum Z in R , quod euenit statuendo $p = 0$ et $q = 0$, unde si iam punctum z exhibeat locum, in quem punctum R erit translatum, pro coordinatis eodem modo quo ante adipiscemur tales formas:

$$x = f + F'' r, \quad y = g + G'' r, \quad z = h + H'' r.$$

Et quia esse oportet

$$F'' F'' + G'' G'' + H'' H'' = 1$$

per binos novos angulos ζ'' et η'' statuere poterimus

$$F'' = \sin. \zeta'', \quad G'' = \cos. \zeta'' \sin. \eta'', \quad H'' = \cos. \zeta'' \cos. \eta''.$$

§. 10. Quoniam igitur coordinatarum x , y et z valores nacti sumus, quos inducere debent tribus casibus euolutis, ubi trium quantitatum p , q , r duae euanescebant, perspicuum hinc est, quomodo coordinatae x , y , z a singulis quantitibus p , q , r pendent. Quamobrem, si omnes istae litterae simul in computum ingrediantur, ita ut iis punctum corporis quodcunque Z indicetur, cui in situ translato respondeat punctum z , coordinatae x , y , z sequentes habere debebunt valores:

$$\begin{aligned} x &= f + F p + F' q + F'' r \\ y &= g + G p + G' q + G'' r \\ z &= h + H p + H' q + H'' r \end{aligned}$$

has autem nouem litteras uidimus reduci ad sex angulos ζ , η , ζ' , η' , ζ'' , η'' .

§. 11. Sumamus nunc punctum Z in ipso puncto s ita ut sit $r=0$, ac si in situ translato isti puncto respondeat punctum z , posito $r=0$ ternae coordinatae ita se habebunt:

$$x=f+Fp+F'q, y=g+Gp+G'q, z=b+Hp+H'q.$$

Vbi necesse est, ut fiat distantia iz distantiae IS aequalis, quae cum sit $\sqrt{pp+qq}$, hinc nascetur ista aequatio:

$$pp+qq=(Fp+F'q)^2+(Gp+G'q)^2+(Hp+H'q)^2$$

et facta evolutione fiet

$$pp+qq=pp(FF+GG+HH)+qq(F'F'+G'G'+H'H') \\ +2pq(FF'+GG'+HH').$$

Cum igitur sit

$$FF+GG+HH=1 \text{ et } F'F'+G'G'+H'H'=1$$

superest, ut euadat $FF'+GG'+HH'=0$.

§. 12. Eodem modo patebit, si sumamus $q=0$, tum istam proprietatem locum habere debere, ut sit $F'F''+G'G''+H'H''=0$: at si statuamus $p=0$, inde resultabit ista aequatio $F'F''+G'G''+H'H''=0$. Quibus tribus conditionibus cum fuerit satisfactum, tota translatio erit determinata; ac nostrae formulae pro omnibus corporis punctis easdem exhibebunt distantias in situ translato, quas tenuerunt in situ initiali.

§. 13. Substituamus nunc in his aequationibus valores ante inuentos, ac prima

$$FF'+GG'+HH'=0 \text{ dabit}$$

$$\sin \zeta \sin \zeta' + \cos \zeta \cos \zeta' \sin \eta \sin \eta' + \cos \zeta \cos \zeta' \cos \eta \cos \eta' = 0 \text{ siue}$$

$$\sin \zeta \sin \zeta' + \cos \zeta \cos \zeta' \cos (\eta - \eta') = 0 \text{ ob } \cos \eta \cos \eta' + \sin \eta \sin \eta' = \cos (\eta - \eta')$$

B b. 2

quae

196 FORMVLAE PRO TRANSLATIONE

quae aequatio per $\cos \zeta \cos \zeta'$ diuisa praebet

$$\tan \zeta \tan \zeta' = -\cos (\eta - \eta').$$

Eodem modo binae reliquae aequationes dabunt

$$\tan \zeta' \tan \zeta'' = -\cos (\eta' - \eta'') \text{ et } \tan \zeta'' \tan \zeta = -\cos (\eta'' - \eta).$$

Ex his igitur tribus aequationibus ternos angulos ζ , ζ' et ζ'' determinare licebit, ita vt omnia per ternos angulos η , η' , η'' definiri queant.

§. 14. Quod quo facilius fieri possit, multiplicemus has tres aequationes in se inuicem, vt fiat $\tan \zeta \tan \zeta' \tan \zeta'' = -\cos (\eta - \eta') \cos (\eta' - \eta'') \cos (\eta'' - \eta)$. Vnde statim patet, nisi productum horum trium cosinum fuerit negatiuum, casum esse impossibilem; quocirca ante omnia necesse est, vt horum cosinum vel vnus vel omnes tres sint negatiui. Statuamus igitur breuitatis gr.

$$\cos (\eta - \eta') \cos (\eta' - \eta'') \cos (\eta'' - \eta) = -\Delta \Delta,$$

vt nanciscamur $\tan \zeta \tan \zeta' \tan \zeta'' = \Delta$, quae aequatio per singulas praecedentes diuisa nobis suppeditat hos valores:

$$\tan \zeta'' = \frac{-\Delta}{\cos (\eta - \eta')} ; \tan \zeta = \frac{-\Delta}{\cos (\eta' - \eta'')} ; \tan \zeta' = \frac{-\Delta}{\cos (\eta'' - \eta)}$$

hoc igitur modo omnes nouem coefficientes initio assumti F , G , H , F' , G' , H' , F'' , G'' , H'' , per solos ternos angulos η , η' , η'' determinantur hoc modo:

$$F = \sin \zeta, G = \cos \zeta \sin \eta, H = \cos \zeta \cos \eta$$

$$F' = \sin \zeta', G' = \cos \zeta' \sin \eta', H' = \cos \zeta' \cos \eta'$$

$$F'' = \sin \zeta'', G'' = \cos \zeta'' \sin \eta'', H'' = \cos \zeta'' \cos \eta''$$

§. 15. Omnes igitur translationes, quibus situs corporis rigidi mutari potest, per sex elementa deter-

determinari possunt. Primo enim ternae coordinatae f, g, h determinant translationem puncti I in i , quae ergo penitus a nostro arbitrio pendent. Deinde, quomodocunque corpus circa hoc punctum i fuerit interea conuersum, eius situs per ternos angulos η, η', η'' , penitus determinatur; sumto enim in situ initiali elemento corporis quocunque Z , cuius positio per ternas coordinatas p, q, r , definitur, id in situ translato reperietur in puncto z , cuius positio per istas ternas coordinatas definitur:

$$x = f + Fp + F'q + F''r$$

$$y = g + Gp + G'q + G''r$$

$$z = h + Hp + H'q + H''r.$$

§. 16. Quo autem magis conuincamur, per has formulas omnia quae ad translationem pertinent perfecte determinari, totum negotium etiam sequenti modo absolui potest. Concipiamus in statu initiali praeter punctum Z aliud quodcunque Z' , in figura quidem non expressum, cuius locus his coordinatis definiatur p', q', r' . Hoc autem punctum translato sit in z' , cui respondeant coordinatae x', y', z' , quarum ergo valores ita exprimentur

$$x' = f + Fp' + F'q' + F''r'$$

$$y' = g + Gp' + G'q' + G''r'$$

$$z' = h + Hp' + H'q' + H''r'.$$

Quibus positis natura corporum rigidorum postulat, ut interuallum in situ translato zz' aequale sit interuallum ZZ' in situ initiali, quandoquidem in his corporibus omnia interualla inter bina eorum pun-

198 FORMVLAE PRO TRANSLATIONE

et quaecunque perpetuo eandem quantitatem seruire debent.

§. 17. Iam vero distantiae punctorum Z et Z' in statu initiali quadratum est

$$(p' - p)^2 + (q' - q)^2 + (r' - r)^2$$

in statu autem translato quadratum distantiae inter puncta z et z' est

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

quod ergo ex tribus sequentibus quadratis componitur

$$\begin{aligned} & (F(p' - p) + F'(q' - q) + F''(r' - r))^2 \\ & + (G(p' - p) + G'(q' - q) + G''(r' - r))^2 \\ & + (H(p' - p) + H'(q' - q) + H''(r' - r))^2 \end{aligned}$$

quorum ergo summa aequalis esse debet illi formulae

$$(p' - p)^2 + (q' - q)^2 + (r' - r)^2.$$

§. 18. Euolutis autem ternis illis quadratis sequens expressio resultabit

$$\begin{aligned} & (p' - p)^2 (FF + GG + HH) \\ & + (q' - q)^2 (F'F' + G'G' + H'H') \\ & + (r' - r)^2 (F''F'' + G''G'' + H''H'') \\ & + 2(p' - p)(q' - q)(FF' + GG' + HH') \\ & + 2(p' - p)(r' - r)(FF'' + GG'' + HH'') \\ & + 2(q' - q)(r' - r)(F'F'' + G'G'' + H'H'') \end{aligned}$$

quamobrem, ut ista expressio priori

$$(p' - p)^2 + (q' - q)^2 + (r' - r)^2$$

reddatur aequalis, quomodocunque coordinatae $p, q, r,$

η, p', q', r' , fuerint assumptae sex sequentibus conditionibus satisfieri oportet

$$\text{I. } FF + GG + HH = 1$$

$$\text{II. } F'F' + G'G' + H'H' = 1$$

$$\text{III. } F''F'' + G''G'' + H''H'' = 1$$

$$\text{IV. } FF' + GG' + HH' = 0$$

$$\text{V. } FF'' + GG'' + HH'' = 0$$

$$\text{VI. } F'F'' + G'G'' + H'H'' = 0.$$

§. 19. At vero omnes istas sex conditiones iam in superioribus adimpleuimus, ubi ostendimus, quemadmodum omnes hi nouem coefficientes per ternos angulos η, η', η'' determinari queant. Ex quo eo clarius intelligitur, solutionem nostram quaestionis circa translationem quamcunque corporum rigidorum penitus esse determinatam et adaequatam, ita ut in parte geometrica, quam motus talium corporum determinatio postulat, nihil amplius desiderari possit.

§. 20. Quomodocunque autem translatio corporis fuerit facta, qua punctum corporis I in punctum i est translatum; notum est si translatio fuerit infinite parua, tum semper in situ translatò dari quaedam recta iz , cuius situs parallelus erit ei, quem eadem recta in statu initiali habuit, ita ut, si punctum I quieuisset, ista recta penitus immota mansisset. Euidens autem est, istam rectam repraesentare axem corporis circa quem gyratio fuerit facta, dum corpus in situm translatum peruenit. Quam-

200 FORMVLAE PRO TRANSLATIONE

Quamobrem maximi momenti erit inuestigare, vtrum, si translatio fuerit finita, etiam detur talis axis.

§ 21. Manifestum autem est, vt recta iz etiam nunc parallela sit rectae IZ , ad hoc requiri tres istas conditiones:

$$1^{\circ}. x - f = p, \quad 2^{\circ}. y - g = q, \quad 3^{\circ}. z - h = r$$

vnde nascuntur hae aequationes:

$$p = Fp + F'q + F''r$$

$$q = Gp + G'q + G''r$$

$$r = Hp + H'q + H''r$$

ex quibus aequationibus litteras p, q, r eliminari oportet. Valores autem ipsius p hinc deducti erunt

$$\frac{F'q + F''r}{1 - F}, \quad \frac{(1 - G')q + G''r}{G}, \quad \frac{(1 - H'')r - H'q}{H}.$$

Horum valorum primus secundo aequatus istam dabit rationem inter q et r , scilicet

$$\frac{q}{r} = \frac{G''(F - 1) - F''G}{GF' - (1 - F)(1 - G')}.$$

ac primus valor tertio aequatus perducit ad hanc relationem:

$$\frac{q}{r} = \frac{(1 - F)(1 - H'') - F''H}{F'H + H'(1 - F)}.$$

Hos igitur duos valores reuera inter se aequari necesse est, siquidem talis axis gyrationis datur.

§. 22. Quod si autem hos duos valores inter se aequales ponamus, perueniemus ad istam aequationem:

$$(1 - F)F''GH' + (1 - F)F'G''H + (1 - F)(1 - G')F''H + (1 - F)(1 - H'')F'G \\ + (1 - F)G''H'(1 - F)^2(1 - G')(1 - H'') = 0$$

culus

cuius aequationis omnia membra factore communi gaudent $(1 - F)$; hoc ergo per divisionem sublato remanebit ista aequatio:

$$F''GH' + F'G''H + (1 - G')F''H + (1 - H'')F'G + (1 - F)G''H' - (1 - F)(1 - G')(1 - H'') = 0$$

quae singulis membris evolutis dat hanc aequationem

$$\begin{aligned} 0 = & -1 + F - FG'' + FG'H'' \\ & + G' - FH'' - FG''H' \\ & + H'' + F'G - F'G'H' \\ & - G'H'' - F''G'H \\ & + G''H' \\ & + F'H. \end{aligned}$$

Hic autem non liquet, quomodo ista expressio ad nihilum redigatur; ac nimis taedium foret loco litterarum F, G, H , eorum valores penitus evolutos substituere.

§. 23. Missa igitur hac investigatione, quoniam pro translatione quacunque formulas dedimus, quarum ope ex data cuiusque puncti positione in statu initiali eiusdem positio in statu translato assignari potest, scopo quem nobis proposueramus plene satisfacimus, ita ut in hac parte nihil amplius desiderari queat, cum tota haec investigatio in determinatione 9 coefficientium $F, G, H, F', G', H', F'', G'', H''$ contineatur.

Additamentum.

§. 24. Cum formulae, quas supra pro quouis situ translato dedimus, maxime sint generales, et omnes

202. FORMVLAE PRO TRANSLATIONE

translationes in se complectantur, mirum videri debet, quod ex illis haud pateat, virum in omni situ translato talis detur recta iz , quae eandem directionem teneat, quam in situ initiali habuit. Aequatio enim §. 22. inuenta tantopere est implicata, ut nimis molestum foret, loco singularum litterarum valores quos ipsis assignauimus substituere. Interim tamen aliunde certum est, quomodocunque corpus rigidum ex vno situ in alium transferatur, semper dari eiusmodi rectam iz , cuius directio nullam mutationem patiatur. Ad hoc enim demonstrandum concipiamus corpori rigido, cuiuscunque fuerit figurae, sphaeram circumscribi cum ipso conexam simulque mobilem, quae centrum habeat in puncto I , quo facilius istam investigationem ad doctrinam sphaericam traducere liceat.

Theorema.

Quomodocunque sphaera circa centrum suum conuertatur, semper assignari potest diameter, cuius directio in situ translato conueniat cum situ initiali.

Demonstratio.

Tab. II. §. 25. Referat circulus A, B, C circulum sphaerae:
Fig. 2. maximum quemcunque, in statu initiali, qui facta translatione peruenerit in situm a, b, c , ita ut puncta A, B, C translata sint in puncta a, b, c ; punctum autem A sit simul intersectio horum duorum circulorum. Quo posito demonstrandum est, semper dari punctum O , quod pari modo referetur tam ad circulo-

circulū A, B, C quam ad circulum a, b, c . Ad hoc igitur necesse est, vt primo distantiae OA et Oa sint inter se aequales; deinde vero, vt etiam arcus OA et Oa ad illos duos circulos aequaliter sint inclinati, siue vt sit angulus $Oab =$ angulo OAB : erunt ergo etiam complementa ad duos rectos, hoc est anguli OaA et OAA inter se aequales. Quoniam autem arcus Oa et OA sunt aequales, erit quoque angulus $OaA =$ angulo OAA , ideoque $OAA = OAA$; vnde patet, si angulus aAa bisecetur arcu OA , tum punctum quaesitum O alicubi in isto arcu AO fore situm; quod igitur reperiatur si arcus aO ita ducatur, vt angulus AaO aequalis euadat angulo OAA . Intersectio enim horum arcuum dabit punctum O , per quod si ducatur diameter Sphaerae, eius positio in situ translato etiam nunc eadem erit, quae fuerat in situ initiali.

§. 26. Ad hoc punctum O facilius definiendum, bisecari potest arcus Aa in puncto M , vbi constitutur arcus MO ad Aa normalis; tum vero ducatur arcus AO , ita vt angulum aAa bisecet; atque intersectio horum arcuum O monstrabit punctum quaesitum. Hic observatur, si arcus aa aequalis capiatur arcui aA , fore a punctum Sphaerae, quod facta translatione peruenerit in punctum A , quamobrem iste angulus aAa bisecari debet, non vero eius deinceps positus aAB .

§. 27. Vulgo quidem punctum I (fig. 1.) ad quod positio corporis initialis refertur, sumi solet

Tab. II.
Fig. 1.

in eius centro grauitatis. Verum ex demonstratione data apparet, veritatem theorematism etiam subsistere, quodcunque aliud punctum pro centro Sphaerae fuerit assumptum. Quamobrem, si in corpore rigido loco I accipiatur punctum quodcunque, per id semper duci poterit linea recta, cuius positio in situ translato non erit immutata; quin etiam nihil impedit, quo minus istud punctum I adeo extra corpus accipiatur. Quamobrem cauendum est, ne ista insignis proprietas tanquam centro grauitatis propria spectetur: ideo enim tantum punctum illud I in ipso centro grauitatis corporis constitui solet, quo formulae analyticae, quibus motus talium corporum definitur, fiunt simpliciores.

§. 28. Cum igitur solidissimis rationibus sit enictum, in omni situ translato semper dari eiusmodi lineam rectam iz , cuius directio non discrepet a directione, quam eadem recta Iz in situ initiali tenuit, etiam certi esse possumus, aequationem §. 22. datam semper locum esse habituram, postquam scilicet loco omnium litterarum valores assignati fuerint substituti; hoc enim facto necessario euenire debet, ut omnes plane termini sponte se mutuo tollant, etiam si hoc ex sex illis conditionibus principalibus, quibus satisfieri oportuit ne utiquam appareat. Quamobrem ista eximia proprietas, cuius veritas geometricè tam facile est ostensa ratione formularum analyticarum pro maxime abscondita est habenda; atque ob hanc ipsam rationem ex

ea pulcherrima incrementa per totam mechanicam merito expectare possumus.

§. 29. Interim tamen formulas, quas pro illis litteris maiusculis supra inuenimus, diligentius euoluamus, quo inde forsitan facilius perspici queat, quemadmodum aequatio illa §. 22. data adimpleatur. Introducis autem sex angulis $\zeta, \zeta', \zeta''; \eta, \eta', \eta''$ per quos illas §. 14. expressimus, ternos priores per posteriores ita determinauimus, ut posito

$$-\cos.(\eta - \eta') \cdot \cos.(\eta' - \eta'') \cdot \cos.(\eta'' - \eta) = \Delta \Delta \text{ effet}$$

$$\text{tang. } \zeta'' = \frac{-\Delta}{\cos.(\eta - \eta')}; \text{ tang. } \zeta = \frac{-\Delta}{\cos.(\eta' - \eta'')}; \text{ tang. } \zeta' = \frac{-\Delta}{\cos.(\eta'' - \eta)}$$

unde ergo tam sinus quam cosinus illorum angulorum deduci oportet.

§. 30. Quod quo facilius fieri possit, loco angulorum η, η' et η'' introducamus alios angulos $\theta, \theta', \theta''$, ita ut sit $\eta - \eta' = \theta''; \eta' - \eta'' = \theta$ et $\eta'' - \eta = \theta'$, unde patet fore $\theta + \theta' + \theta'' = 0$, ita ut hi tres noui anguli tantum duobus aequiualeant; lideoque hinc ex angulis η, η' et η'' unus manebit indefinitus, qui si fuerit η erit $\eta' = \eta - \theta''$ et $\eta'' = \eta + \theta'$. His igitur angulis introductis erit $\Delta \Delta = -\cos. \theta \cdot \cos. \theta' \cdot \cos. \theta''$, hocque valore adhibito habebimus

$$\text{tang. } \zeta'' = -\sqrt{-\frac{\cos. \theta \cos. \theta'}{\cos. \theta''}},$$

$$\text{tang. } \zeta = -\sqrt{-\frac{\cos. \theta' \cos. \theta''}{\cos. \theta}},$$

$$\text{tang. } \zeta' = -\sqrt{-\frac{\cos. \theta'' \cos. \theta}{\cos. \theta'}}.$$

§. 31. Ex his formulis pro tangentibus inuentis colligamus formulas pro sinibus et cosinibus,

206 FORMVLAE PRO TRANSLATIONE

ac pro primo quidem erit

$$\sin. \zeta'' = - \frac{\sqrt{1 - \cos. \theta \cos. \theta'}}{\sqrt{\cos. \theta'' - \cos. \theta \cos. \theta'}} \text{ et } \cos. \zeta'' = \frac{\sqrt{\cos. \theta''}}{\sqrt{\cos. \theta'' - \cos. \theta \cos. \theta'}}$$

Cum autem sit $\theta'' = -\theta - \theta'$ erit

$$\cos. \theta'' = \cos. (\theta + \theta') = \cos. \theta \cos. \theta' - \sin. \theta \sin. \theta'$$

quo valore substituto fiet

$$\sin. \zeta'' = \frac{\sqrt{1 - \cos. \theta \cos. \theta'}}{\sqrt{1 - \cos. \theta \cos. \theta'}} = - \sqrt{\frac{\cos. \theta \cos. \theta'}{1 - \cos. \theta \cos. \theta'}} = - \sqrt{\cot. \theta \cot. \theta'}$$

similique modo

$$\cos. \zeta'' = \frac{\sqrt{\cos. \theta \cos. \theta' - \sin. \theta \sin. \theta'}}{\sqrt{1 - \cos. \theta \cos. \theta'}} = \sqrt{\frac{-\cos. \theta \cos. \theta'}{1 - \cos. \theta \cos. \theta'}} + 1 = \sqrt{1 - \cot. \theta \cot. \theta'}$$

Atque hinc iam perspicuum est, pro binis reliquis
angulis fore

$$\sin. \zeta = - \sqrt{\cot. \theta' \cot. \theta''} \text{ et } \cos. \zeta = + \sqrt{1 - \cot. \theta' \cot. \theta''}$$

$$\sin. \zeta' = - \sqrt{\cot. \theta'' \cot. \theta} \text{ et } \cos. \zeta' = + \sqrt{1 - \cot. \theta'' \cot. \theta}$$

$$\sin. \zeta'' = - \sqrt{\cot. \theta \cot. \theta'} \text{ et } \cos. \zeta'' = + \sqrt{1 - \cot. \theta \cot. \theta'}$$

§. 32. Quod si nunc isti valores enoluti substituantur loco angulorum ζ , ζ' et ζ'' , formulae pro nouem litteris F, G, H, F', G', H' etc. supra inventae sequenti modo exprimentur, postquam scilicet breuitatis gratia posuerimus

$$\cot. \theta = t; \cot. \theta' = t' \text{ et } \cot. \theta'' = t''$$

$$F = -\sqrt{t' t''}; G = \sin. \eta \sqrt{1 - t' t''}; H = \cos. \eta \sqrt{1 - t' t''}$$

$$F' = -\sqrt{t'' t}; G' = \sin. \eta' \sqrt{1 - t'' t}; H' = \cos. \eta' \sqrt{1 - t'' t}$$

$$F'' = -\sqrt{t t'}; G'' = \sin. \eta'' \sqrt{1 - t t'}; H'' = \cos. \eta'' \sqrt{1 - t t'}$$

§. 33. Verum etiam si hos valores in aequatione §. 22. substituiamus, nullo tamen modo perspicitur,

citur, quomodo singula eius membra se mutuo destruere queant. Quamobrem necesse erit, insuper eius conditionis rationem habere, quod sit $\theta + \theta' + \theta'' = 0$; unde inter litteras t, t', t'' ista relatio nascitur, ut sit $tt' + t't'' + t''t' = 1$, siue ut summa productorum ex binis unitate aequatur. Praeterea vero etiam ad eam conditionem est attendenda, qua erat $\eta' = \eta - \theta''$ et $\eta'' = \eta + \theta'$, atque his conditionibus rite observatis et per calculum enolutis nullum dubium superesse potest, quin ista aequatio adimpleatur. At vero nemo facile stupendum hunc laborem in se suscipere volet; quamobrem egregia ista proprietas omnium corporum rigidorum multo magis ardua est censenda, et Geometris pulcherrimam occasionem praebere potest, vires suas in ista proprietate penitus enucleanda exercendi.

NOVA